5.3- Changement de variables :

5.3.1- Changement affine :

Soit φ *une application affine bijective de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *et* A *une partie bornée de* $\mathbb{R}^3$.

Si une fonction f est intégrable sur $\varphi(A)$ alors $f \circ \varphi$ est intégrable sur A et l'on a :

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x, y, z) dxdydz$$

$$= \iiint_{A} f \circ \varphi(u, v, w) j_{\varphi}(u, v, w) dudvdw$$

Grâce à ce changement de variables, on peut calculer une intégrale triple sur un parallélépipède en se ramenant à une intégrale sur un pavé.

5.3.2- Changement de variables en coordonnées cylindriques :

Soient $a \epsilon \mathbb{R}$ *et A une partie bornée de*

$$\mathbb{R}_+ \times [a, a+2\pi] \times \mathbb{R} .$$

Si f est intégrable sur $\varphi(A)$ *telle que :*

$$\forall (r, \theta, z) \epsilon \mathbb{R}_{+} \times [a, a + 2\pi] \times \mathbb{R}:$$

$$\varphi(r, \theta, z) =$$

$$(\varphi_1(r, \theta, z), \varphi_2(r, \theta, z), \varphi_3(r, \theta, z))$$

- **Où** $\begin{cases} \varphi_1(r,\theta,z) = rcos\theta = x, \\ \varphi_2(r,\theta,z) = rsin\theta = y \\ \varphi_3(r,\theta,z) = z \end{cases}$

Alors,

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x,y,z)\, dxdydz$$

$$= \iiint_{A} f(rcos\theta, rsin\theta, z)\, rdrd\theta dz$$

5.3.3- Changement de variables en coordonnées sphériques :

Les coordonnées sphériques sont définies par l'application :

$\psi: \mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ***avec***

$$\psi(r,\theta,\varphi) =$$

$$(r\ sin\theta\ cos\varphi, r\ sin\theta\ sin\varphi, r\ cos\theta)$$

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$.

Si f est intégrable sur $\psi(A)$ alors :

$$\iiint_{\psi(A)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\iiint_{A} f(r\, sin\theta\, cos\varphi, r\, sin\theta\, sin\varphi, r\, cos\theta)$$

$$r^2\, sin\theta \quad dr\, d\theta\, dz$$

Exemple 1:

- *Calculons le volume d'une boule* $B(R)$ *de rayon R.*

$$\mu(B) = \iiint_B r^2\, sin\theta\; dr\; d\theta\; dz$$

$$= \int_0^R r^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} sin\theta\; d\theta \right) d\varphi \right) dr$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exemple 2:

Pour une ellipsoïde ε *d'équation :*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Où $a>0,\quad b>0$ ***et*** $c>0$**.**

$$\mu(\varepsilon) = \iiint_{\varepsilon} dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_{\psi(B)} dx\, dy\, dz$$

Avec $\psi : B \to \varepsilon$ ***une application affine définie par :***

$$\psi(u, v, w) = (au, bv, cw)$$

Et $j_\psi(u,v,w) = abc$

D'où :

$$\mu(\varepsilon) = \iiint_B abc \; du\, dv\, dw$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc$$

FIN

CHAPITRE

2